日期：2022 年 4 月 25 日

成绩：

学院：智能工程学院　课程：自动驾驶技术基础　周次：第 9 周

专业：智能科学与技术　姓名：方桂安　学号：20354027

1　题一

1.1　题目

自动驾驶为了出色地完成驾驶任务，可分为哪四大模块？

1.2　解答

- 感知系统
- 地图和定位
- 决策与规划
- 控制与建模

2　题二

2.1　题目

系统建模一般分哪两种建模方式？

2.2　解答

（1）**机理建模**

根据系统的运动学或动力学的规律和机理，如机械系统中的牛顿定律、电系统中的基尔霍夫定律等，建立系统的数学表达式。要求已知所有元部件的结构及对应的物理机理。

（2）**实验建模**

人为地给系统施加某种典型的输入信号，记录下对应的输出响应数据，通过辨识的方法采用适当的数学模型去模拟逼近该过程，所获得的数学模型称为辨识模型。

3 题三

3.1 题目

请写出高速转向车辆模型的简化横向误差模型（即四个状态为误差）

3.2 解答

$$\begin{aligned}
&\delta \to 0 \\
&\Rightarrow \alpha_f \to 0, \alpha_r \to 0, v_x \gg v_y \\
&\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cos\psi - v_y \sin\psi \\ v_y \cos\psi + v_x \sin\psi \\ \omega \\ \frac{1}{m}\left(F_{xr} + \cos\delta F_{xf} - \sin\delta F_{yf} + m v_y \omega\right) \\ \frac{1}{m}\left(F_{yr} + \sin\delta F_{xf} + \cos\delta F_{yf} - m v_x \omega\right) \\ \frac{1}{I_z}\left(l_f F_{xf} \sin\delta + l_f F_{yf} \cos\delta - F_{yr} l_r\right) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} v_x \cos\psi - v_y \sin\psi \\ v_y \cos\psi + v_x \sin\psi \\ \omega \\ \frac{1}{m}\left(F_{xr} + F_{xf}\right) \\ \frac{1}{m}\left(F_{yr} + F_{yf} - m v_x \omega\right) \\ \frac{1}{I_z}\left(l_f F_{yf} - F_{yr} l_r\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_r &= \frac{v_y - l_r\omega}{v_x} \\
\alpha_f &= -\delta + \frac{v_y + l_f\omega}{v_x} \\
F_{yr} &= -2K_r\alpha_r \\
F_{yf} &= -2K_f\alpha_f \\
F_{xr} &= \left(C_{m1} - C_{m2}v_x\right)d - C_rN - C_dv_x^2 \\
F_{xf} &= -C_rN - C_dv_x^2
\end{aligned}$$

则横向加速度误差

$$\ddot{e}_1 = a_y - a_{ydes} = \left(\dot{v}_y + v_x\dot{\psi}\right) - v_x\dot{\psi}_{des} = \dot{v}_y + v_x\left(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}\right) = \dot{v}_y + v_x\left(\omega - \omega_{des}\right)$$

横向速度误差 $\dot{e}_1 = v_y + v_x\left(\psi - \psi_{des}\right)$

航向误差 $e_2 = \psi - \psi_{\mathrm{des}}$

航向角速度误差 $\dot{e}_2=\dot{\psi}-\dot{\psi}_{des}=\omega-\omega_{des}$

航行角加速度误差 $\ddot{e}_2=\dot{\omega}-\dot{\omega}_{\text{des}}$

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \ddot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \ddot{e}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2K_r+2K_f}{mv_x} & \frac{2K_r+2K_f}{m} & -\frac{2l_fK_f-2l_rK_r}{mv_x}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{2l_fK_f-2l_rK_r}{I_zv_x} & \frac{2l_fK_f-2l_rK_r}{I_z} & -\frac{2l_f^2K_f+2l_r^2K_r}{I_zv_x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ \dot{e}_1\\ e_2\\ \dot{e}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{2K_f}{m}\\ 0\\ \frac{2l_fK_f}{I_z}\end{bmatrix}\delta+$$
$$\begin{bmatrix}0\\ -\frac{2l_fK_f-2l_rK_r}{mv_x}-v_x\\ 0\\ -\frac{2l_f^2K_f+2l_r^2K_r}{I_zv_x}\end{bmatrix}\omega_{\text{des}}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\dot{\omega}_{\text{des}}$$

4 题四

4.1 题目

二次型性能指标函数一般包含哪三项优化项?

4.2 解答

(1) 积分项 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}e^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t)\mathrm{d}t$

设积分项

$$L_e=\frac{1}{2}\left[e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)e(t)\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}q_{ij}(t)e_i(t)e_j(t)$$

由于 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为半正定, 在 $[t_0,t_f]$ 非负, 积分 $\int_{t_0}^{t_e}L_e\,\mathrm{d}t$ 表示了在区间上误差大小, 反映了系统在控制过程中动态跟踪误差的累积和。由于误差的二次型表达形式, 所以权矩阵 $\boldsymbol{Q}(t)$ 实际上能给较大的误差以较大的加权, 而 $Q(t)$ 为时间函数, 则意味着对不同时刻误差赋予不同的加权, 该项反映了系统的控制效果。

(2) 积分项 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}u^{\top}(t)R(t)u(t)\mathrm{d}t$

设积分项

$$L_u=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}r_{ij}(t)u_i(t)u_j(t)$$

由于 $\boldsymbol{R}(t)>0$, 且对称, 而控制信号的大小往往正比于作用力或力矩, 故 $\int_{t_0}^{t_f}L_u\,\mathrm{d}t$ 表示了在整个控制过程中所消耗的控制能量。$\boldsymbol{R}(t)$ 实际上能给各控制分量赋予不同的权, 它是时间的函数，则意味着对不同时刻的控制分量赋子不同的加权。

(3) 终值项 $\frac{1}{2} e^{\mathrm{T}}\left(t_f\right) \boldsymbol{F} \boldsymbol{e}\left(t_f\right)$

设终值项

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\left(t_j\right) \boldsymbol{F} \boldsymbol{e}\left(t_f\right)=\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{ij} e_i(t) e_j(t)$$

终值项的物理含义是表示在控制过程结束后, 对系统终态跟踪误差的要求, 强调了系统接近终端时的误差。该项也同样反映了系统的控制要求。如对终端误差限制为 $e\left(t_f\right)=0$, 此项可略去。

综上所述, 使二次型性能指标式极小的物理意义是：使系统在整个控制过程中的动态跟踪误差与控制能量消耗, 以及控制过程结束时的终端跟踪误差综合最优。

5 题五

5.1 题目

线性二次问题三种重要形式分别是?

5.2 解答

（1）**状态调节器**:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t) \boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t) \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}\left(t_0\right)=\boldsymbol{x}_0 \\
&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t) \boldsymbol{x}(t) \\
&\boldsymbol{C}(t)=I, \boldsymbol{y}_r(t)=0 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{e}(t)=-\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned}$$

二次型性能指标:

$$\begin{aligned}
J &=\frac{1}{2} \boldsymbol{e}^T\left(t_f\right) \boldsymbol{F} \boldsymbol{e}\left(t_f\right)+\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{e}^T(t) \boldsymbol{Q}(t) \boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{u}^T(t) \boldsymbol{R}(t) \boldsymbol{u}(t) d t \\
&=\frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T\left(t_f\right) \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}\left(t_f\right)+\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{x}^T(t) \boldsymbol{Q}(t) \boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t) \boldsymbol{R}(t) \boldsymbol{u}(t) d t
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{F}$ 为半正定 $m \times m$ 常数矩阵; $\boldsymbol{Q}(t)$ 为半正定 $m \times m$ 对称矩阵; $\boldsymbol{R}(t)$ 为正定 $r \times r$ 对称矩阵; 终端时刻 t_f 固定。

这时，线性二次型最优控制问题为，当系统受扰偏离原零平衡状态时，要求产生一控制向量, 使系统状态 $x(t)$ 恢复到原平衡状态附近, 并使性能指标极小。因而, 称为状态调节器问题。

（2）**输出调节器**:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t) \boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t) \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}\left(t_0\right)=\boldsymbol{x}_0 \\
&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t) \boldsymbol{x}(t) \\
&\boldsymbol{y}_r(t)=0 \Rightarrow \boldsymbol{e}(t)=-\boldsymbol{y}(t)
\end{aligned}$$

二次型性能指标：

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T\left(t_f\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}\left(t_f\right)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\left(t_f\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}\left(t_f\right)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{y}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)dt \end{aligned}$$

$\boldsymbol{F}$ 为半正定 $m\times m$ 常数矩阵; $\boldsymbol{Q}(t)$ 为半正定 $m\times m$ 对称矩阵; $\boldsymbol{R}(t)$ 为正定 $r\times r$ 对称矩阵; 终端时刻 t_f 固定。

这时线性二次型最优控制问题为：当系统受扰偏离原输出平衡状态时，要求产生一控制向量, 使系统输出 $y(t)$ 保持在原平衡状态附近, 并使性能指标极小, 因而称为输出调节器。

（3）**输出跟踪器**:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}\left(t_0\right)=\boldsymbol{x}_0 \\ &\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

二次型性能指标:

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T\left(t_f\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}\left(t_f\right)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)dt$$

$\boldsymbol{F}$ 为半正定 $m\times m$ 常数矩阵; $\boldsymbol{Q}(t)$ 为半正定 $m\times m$ 对称矩阵; $\boldsymbol{R}(t)$ 为正定 $r\times r$ 对称矩阵; 终端时刻 t_f 固定。

针对线性系统状态空间表达式和二次型性能指标式, 当 $\boldsymbol{C}(t)\neq\boldsymbol{I},\boldsymbol{y_r}(t)\neq 0$ 时, 线性二次型最优控制问题归结为: 当理想输出向量 $y_r(t)$ 作用于系统时, 要求系统产生一控制向量, 使系统实际输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 始终跟踪 $y_r(t)$ 的变化, 并使性能指标式极小。也就是说以极小的控制能量为代价, 使误差保持在零值附近。因而, 这一类线性二次型最优控制问题称为输出跟踪器问题。

6 题六

6.1 题目

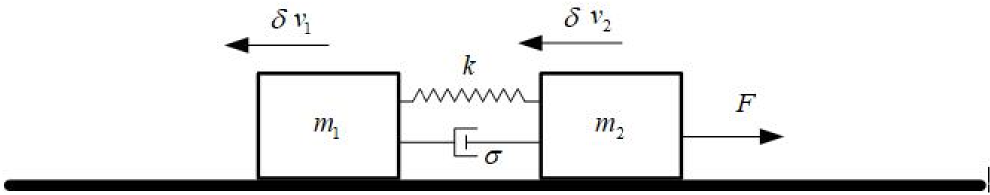
Kalman Filter（LQE）如何通过 LQR 求得，请写出 matlab 关键代码，即：xxx=lqr(xxx) 。

6.2 解答

$$\because \begin{aligned} L^T &= \operatorname{lqr}\left(A^T, C^T, R_{ww}, R_{vv}\right) \\ L &= \operatorname{lqe}\left(A, G, C, R_{ww}, R_{vv}\right) \end{aligned}$$

```
KF = (lqr(A',C',Q,R))'; % matlab 代码
```

7 编程实践题



7.1 题目

给定一个双质系统：$m_1 = 2, m_2 = 1$, 弹簧系数 $k = 5$, 阻尼 $\sigma = 0.1$, 质量块与地面的滑动阻尼 $\delta = 0.1$ (与速度有成正比)。初始时刻 m_1 质量块处于 x = 0 的位置, 两质量块距离为 0 。现在 m_2 处作用一外力 F 拖动系统使 m_1 与 m_2 质量块均处于 $x = 5$ 的位置。

7.2 解答

7.2.1 对系统建模（系统可以直接测量两个物体的位置）

考虑系统的状态空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + \nu \end{cases}$$

其中，A 为状态空间表达式的系数矩阵, B 为系统的输入矩阵, C 为系统的输出矩阵, w 为系统的状态噪声, u 为系统的输入, x 为系统的状态, y 为系统的输出, ν 为系统的输出噪声。且噪声的均值为 0 并满足高斯分布。

根据题意, 取两质量块的初始位置为坐标系原点, 外力 F 方向 (向右) 为正方向。选择质量块 m_1 、m_2 的速度 $\dot{x}_1$ $\dot{x}_2$, 位移 (位置) x_1 x_2 作为状态变量。即状态向量 $\boldsymbol{x} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$ 。设控制变量 $u = F$ 。

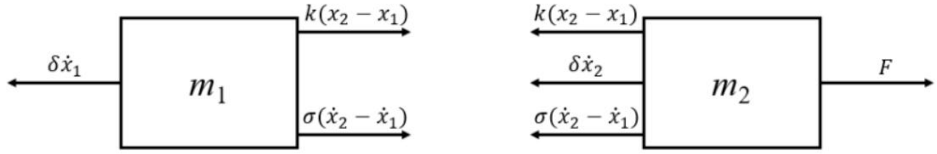


图 1: 质量块受力图

质量块 m_1, m_2 的受力情况如图1所示。对每一个质量块应用牛顿运动定律, 可得系统的运动方程。

对于 m_1, 有

$$m_1\ddot{x}_1 = k\left(x_2 - x_1\right) + \sigma\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) - \delta\dot{x}_1$$

对于 m_2, 有

$$m_2\ddot{x}_2 = F - k\left(x_2 - x_1\right) - \sigma\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) - \delta\dot{x}_2$$

整理上述两式可得

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\frac{1}{m_1}(\delta+\sigma)\dot{x}_1 + \frac{\sigma}{m_1}\dot{x}_2 - \frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 \\
\ddot{x}_2 &= \frac{\sigma}{m_2}\dot{x}_1 - \frac{1}{m_2}(\delta+\sigma)\dot{x}_2 + \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{F}{m_2} \\
\dot{x}_1 &= \dot{x}_1 \\
\dot{x}_2 &= \dot{x}_2
\end{aligned}$$

将此微分方程组化为向量矩阵形式, 即得系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_1}(\delta+\sigma) & \frac{\sigma}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{\sigma}{m_2} & -\frac{1}{m_2}(\delta+\sigma) & \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

因此,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_1}(\delta+\sigma) & \frac{\sigma}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{\sigma}{m_2} & -\frac{1}{m_2}(\delta+\sigma) & \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

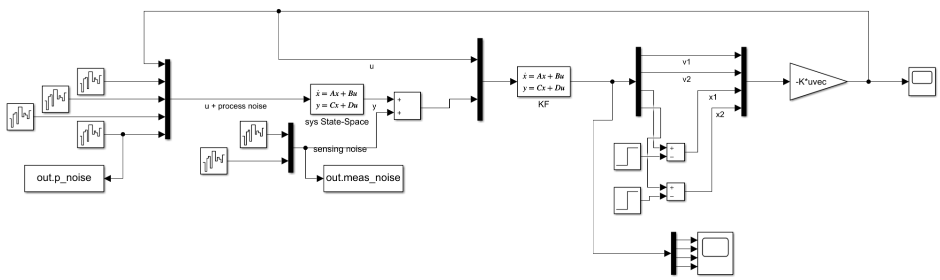
由于系统可以直接测量两个物体的位置，故 $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

考虑性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right] dt$$

其中取,

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = 1$$



7.2.2 判断系统可控性与可观性

(1) **判断可控性**。系统状态可控的充分必要条件是其能控性矩阵 $\boldsymbol{Q}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ 满秩, 即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_k = n$, n 为系统的阶次。本系统 $n = 4$, 由 MATLAB 计算 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}] = 4$, 因此该系统具有能控性。

(2) **判断可观性**。系统状态可观的充分必要条件是其能观测性矩阵 $\boldsymbol{Q}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{CA} & \boldsymbol{CA}^2 & \cdots & \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$ 满秩, 即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_g = n$ 。本系统 $n = 4$, 由 MATLAB 计算 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{CA} \quad \boldsymbol{CA}^2 \quad \boldsymbol{CA}^3] = 4$, 因此该系统具有能观测性。

7.2.3 设计实现 LQG 控制器并绘制闭环控制性能曲线

详细代码见附录，由此可绘制以下闭环控制性能曲线。

v_1, p_1 是质量块 m_1 的速度与位置，v_2, p_2 是质量块 m_2 的速度与位置，由图3可知，在 t=10s 开始施加外力，大约在 t=20s 时系统趋于稳定，两质量块从原点移动到 p=5m 的位置。

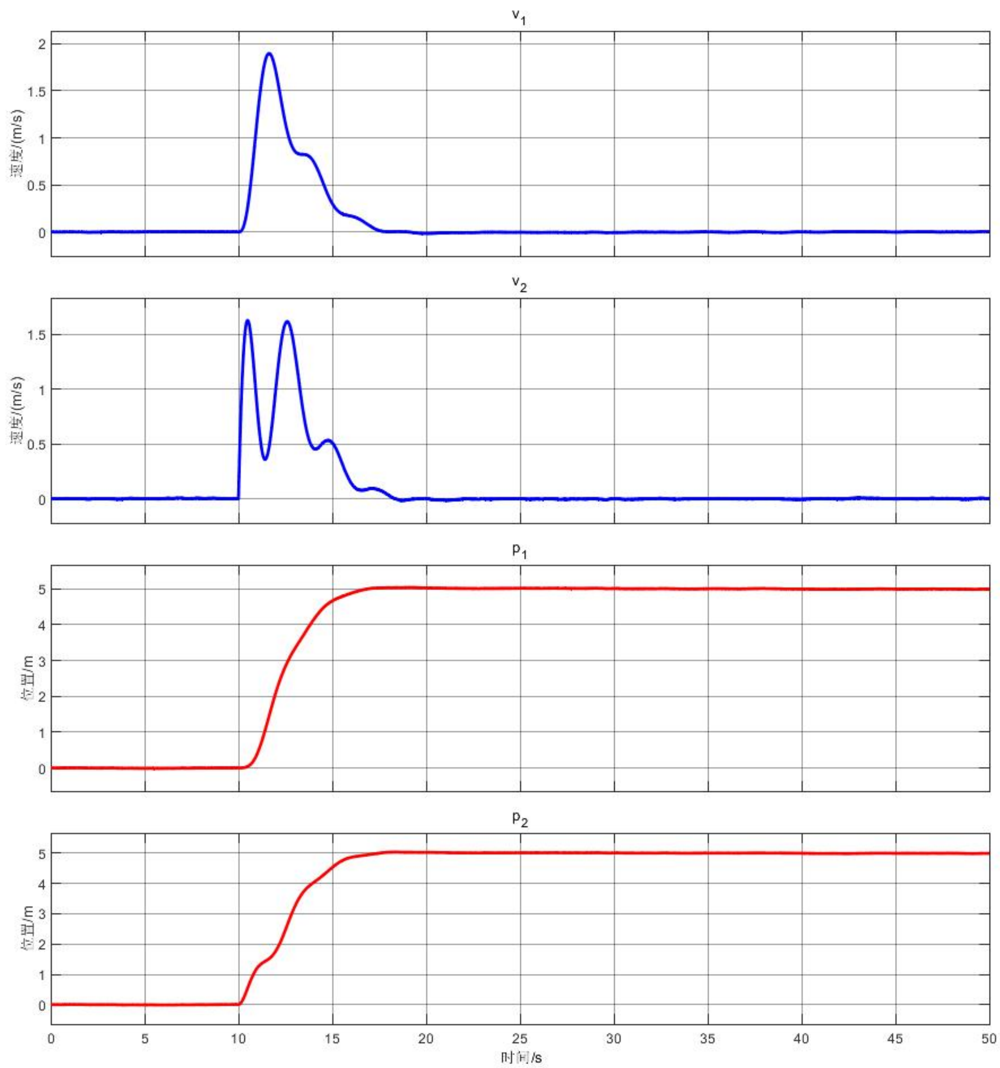


图 2: 状态变量变化图

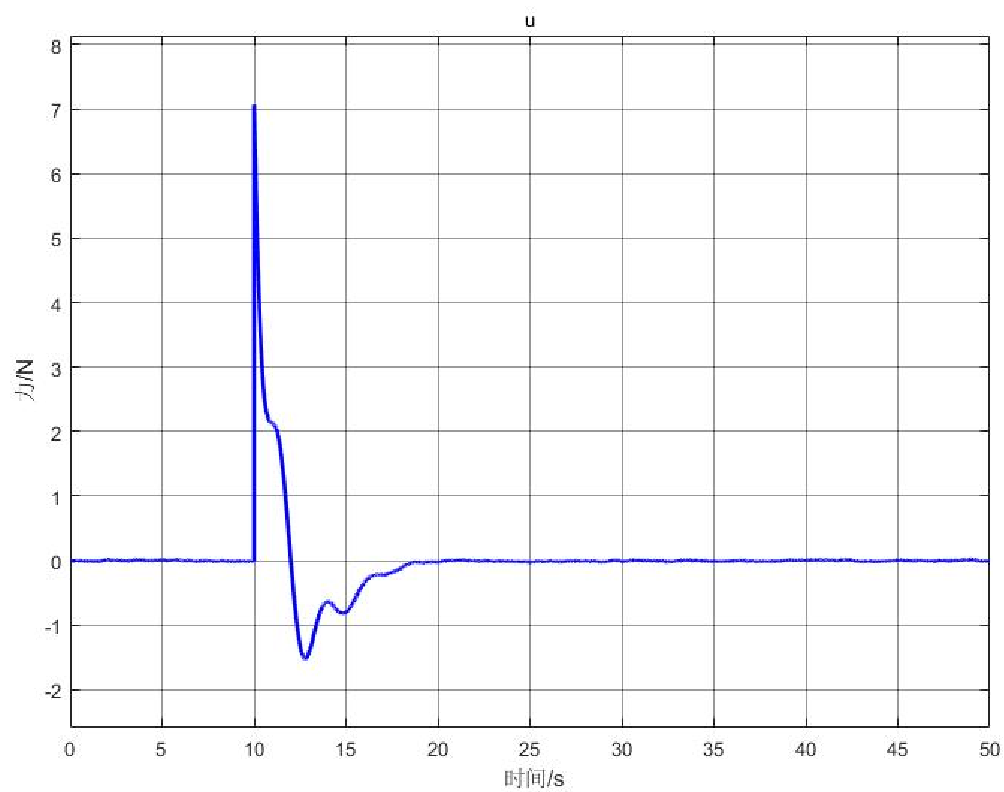


图 3: 外力变化图

A 附录：代码

```
clc,clear,close all

% system parameter
k = 5;
sigma = 0.1;
Δ= 0.1;
m1 = 2;
m2 = 1;

% Build the sys state space here, with states: x=[v1 v2 p1 p2]
% get your state space matrix
A = [ -(Δ+sigma)/m1 sigma/m1 -k/m1 k/m1;
 sigma/m2 -(Δ+sigma)/m2 k/m2 -k/m2;
 1 0 0 0;
 0 1 0 0 ] ;
B = [ 0; 1/m2; 0 ; 0 ] ;
C = [0 0 1 0;
     0 0 0 1];
G = eye(4);

BF = [ B G ];
DF = zeros(2,5);

% Verify the controllability and observability here
rank(ctrb(A,B));
rank(obsv(A,C));



% design your LQR here
Q = diag([2,2,1,1]);
R = 1;
[K,S,e] = lqr(A,B,Q,R);

% design your LQE here
Rxx = diag([2,2,1,1]);
Ruu = eye(2);
[L,P,E] = lqe(A,G,C,Rxx,Ruu);
```